Facultad de Ingeniería de la Universidad de Buenos Aires.
ANÁLISIS MATEMÁTICO III

APUNTES DE ANÁLISIS DE VARIABLE COMPLEJA
D. Prelat - 2020

§7) FUNCIONES ELEMENTALES

Hemos visto en el apartado anterior una clase muy importante de funciones holomorfas. Anteriormente, habíamos visto otros ejemplos: las polinómicas y las algebraicas. Éstas y algunas pocas analíticas (junto con sus inversas locales) constituyen una familia muy popular de funciones, las denominadas *funciones elementales*. Se trata de una clasificación bastante arbitraria, pues el término designa a las funciones "más conocidas", lo que no es muy preciso que digamos. Por otra parte, estas funciones elementales son, esencialmente, las mismas que las que se vieron en Análisis I con el mismo nombre. La posibilidad de extender estas funciones al dominio complejo se debe, precisamente, a que estas funciones elementales son analíticas. Antes de presentarlas, recordaremos la definición de un concepto que vamos a utilizar a lo largo de todo este capítulo.

***Definición* 7.1:** Una función $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ definida en un abierto $D \subseteq \mathbb{C}$ se dice *localmente inversible* en *D* sii para cada $z_0 \in D$ existen abiertos U_0 y V_0 tales que: (1) $z_0 \in U_0$, $f(z_0) \in V_0$, $U_0 \subseteq D$ y (2) la restricción de f a U_0 es una biyección $f_{|U_0} : U_0 \longrightarrow V_0$. Cada inversa $f_{|U_0}^{-1} : V_0 \longrightarrow U_0$ se denomina *inversa local de f en torno del punto* z_0, o sencillamente *inversa local*, si no se requiere especificar el punto z_0.

***Observación* 7.1**: [*Unicidad local de las inversas locales*] Dos inversas locales de una función coinciden en la intersección de sus dominios. Es decir: si $g : V_0 \longrightarrow U_0$ y $h : W_0 \longrightarrow U_0$ son inversas locales de f en torno de un mismo punto z_0, entonces $g(w) = h(w)$ para todo $w \in V_0 \cap W_0$. Esto es porque para cada $w \in V_0 \cap W_0$ existe un único $z \in U_0$ tal que $f(z) = w$ y entonces $g(w) = g(f(z)) = z = h(f(z)) = h(w)$.

Pasemos, ahora sí, a presentar a las protagonistas de este capítulo.

Elementales básicas:

(a) Hay solamente tres elementales algebraicas básicas:

- La constante 1, es decir la función $\breve{1}:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$ tal que para todo z es $\breve{1}(z)=1$;
- la función identidad $Id:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$, definida por $Id(z)=z$ para todo z.
- la inversión (multiplicativa) $J:\mathbb{C}-\{0\}\longrightarrow\mathbb{C}-\{0\}$, definida por $J(z)=\dfrac{1}{z}$ (para todo $z\neq 0$).

Obsérvese que la identidad y la inversión son biyectivas e iguales a sus inversas. No es el caso de la constante 1, obviamente, que no tiene inversa (ni inversa local en torno de ningún punto, dado que no es inyectiva en ningún entorno de ningún punto).

(b) Las trascendentes básicas en variable compleja son la exponencial y sus infinitas inversas locales, denominadas logaritmos, que pasamos a describir. Primero recordemos lo que sabemos hasta ahora de la exponencial compleja:

Definición 7.2: La función $\exp:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$ está definida, para cada $z\in\mathbb{C}$, como $\exp(z)\overset{\text{notación}}{=}e^{z}\overset{\text{definición}}{=}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^{n}$, (serie de potencias absolutamente convergente $\forall z\in\mathbb{C}$).

Hemos visto que para todo z es $\exp'(z)=\exp(z)$ y que se verifica la propiedad algebraica fundamental siguiente: para todo par de complejos z y w : $\exp(z+w)=\exp(z)\exp(w)$. Esta propiedad motiva psicológicamente la notación exponencial: $e^{z+w}=e^{z}e^{w}$. Con esta propiedad y la maravillosa fórmula de Euler podemos exhibir fácilmente las componentes real e imaginaria de la exponencial: para cada complejo $z=x+iy$:

$$\exp(x+iy)=e^{x+iy}=e^{x}e^{iy}=e^{x}[\cos(y)+isen(y)]=e^{x}\cos(y)+ie^{x}sen(y) \qquad (7.1)$$

De esta expresión se deduce inmediatamente que la exponencial es periódica con período $2\pi i$, es decir: para todo entero (positivo, negativo o nulo) k y para todo complejo z se verifica:

$$\exp(z+2k\pi i)=\exp(z) \qquad (7.2)$$

Esta periodicidad marca una diferencia sustancial respecto de la exponencial real $\exp:\Re\longrightarrow(0,+\infty)$, que tiene como función inversa nuestro viejo conocido y familiar logaritmo natural $\ln:(0,+\infty)\longrightarrow\Re$. En cambio, la exponencial compleja no es inyectiva, como se ve claramente en (7.2). Para entender el significado y el uso de las inversas locales de la exponencial, llamadas logaritmos, recomiendo leer el parágrafo que sigue, comprendido entre dos tréboles. Si está muy apurado y/o ya conoce el tema y/o no le interesa conocerlo, siga directamente hasta el segundo trébol. Nadie le va a hacer una multa.

♣ *Remojito motivador*:

El mismo problema que tenemos con la exponencial compleja ocurría (y sigue ocurriendo) con las funciones circulares *seno* y *coseno* de nuestra más tierna infancia. Sin embargo esto no impidió que aparecieran "las inversas" de *seno* y coseno, denominadas *arcoseno* y *arcoseno*. Por otra parte, aprendimos que para que una función tenga inversa tenía que ser biyectiva, es decir: inyectiva y sobreyectiva. Las funciones *seno* y *coseno*, como funciones $\Re \longrightarrow \Re$ no son sobreyectivas, pues sus valores oscilan entre -1 y 1. Esto puede corregirse viéndolas como funciones sobreyectivas $\Re \longrightarrow [-1,1]$. Es decir: la no sobreyectividad se resuelve fácilmente restringiendo el codominio. Lo mismo hicimos con la exponencial real, que en lugar de verla como una función $\Re \longrightarrow \Re$, la consideramos $\Re \longrightarrow (0,+\infty)$. Ahora queda el problema de la no inyectividad de *seno* y *coseno*, y este problema es más serio. La pregunta que nos podemos hacer, en estos momentos, es para qué cuernos queremos las inversas de las trigonométricas. Y la razón es tan práctica como sencilla: se trata de resolver ecuaciones. Para esto sirven las inversas, para "despejar" soluciones. Algunos seres humanos lo vienen haciendo desde hace milenios, resolviendo ecuaciones de segundo grado, sistemas de ecuaciones lineales, ecuaciones algebraicas, ecuaciones diferenciales, etc. En nuestro caso, uno de los más antiguos de la historia, se nos presenta, por ejemplo, la ecuación $sen(\alpha) = c$, donde c es el dato (un número real conocido) y α es la incógnita, lo que hay que "despejar". El primer problema es que si $|c| > 1$, la ecuación no tiene solución. Eso ya lo sabíamos y por eso "achicamos" el codominio de la función *seno* a su imagen, el intervalo [-1, 1]. Consideremos entonces que c está en este intervalo, es decir, que $|c| \leq 1$. Ahora nos encontramos con que existen infinitas soluciones α. Es decir: la ecuación $sen(\alpha) = c$ es una porquería: o no tiene solución o tiene infinitas. Pero algo hay que hacer (pasarse a la Facultad de Derecho es una opción), pues la ecuación es muy importante (para la Ingeniería, por ejemplo). Con un poco de paciencia, haciendo algunos gráficos nos damos cuenta de que la periodicidad de la función *seno* nos da una mano: para cada $c \in [-1,1]$ existe un único $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ tal que $sen(\alpha) = c$. Esto es exactamente la definición de una función: "para cada … existe un único….". En nuestro caso, la función sería $\alpha(c)$: para cada $c \in [-1,1]$ existe un único $\alpha(c) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ tal que $sen(\alpha(c)) = c$. La función que acabamos de definir es precisamente la función *arcoseno*: $\alpha(c)$ es el *arcoseno* de c, y es la inversa de la función *seno* restringida al intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Es decir: la inversa de la función

$$sen_{|[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} : [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1,1]$$

que sí es biyectiva, y su inversa

$$arsen:[-1,1] \longrightarrow [-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}]$$

se denomina *arcoseno*. Esto significa que para cada $x \in [-1,1]$ se verifica que $sen(arsen(x)) = x$. Obsérvese que la no sobreyectividad la resolvimos restringiendo el codominio y la no inyectividad, restringiendo el dominio. Obviamente, en lugar del intervalo $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ se podría haber elegido cualquier otro de longitud π, y para cada uno de estos intervalos tenemos una inversa de la función *seno* restringida a dicho intervalo. Cada una de estas inversas es una inversa local de la función *seno*. La elección del intervalo $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ se hizo por razones prácticas y es por eso que cuando usted calcula el *arcoseno* de un número (del intervalo [-1, 1]), su calculadora le da como respuesta un ángulo comprendido siempre entre $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$ (si está trabajando en radianes; si trabaja en grados sexagesimales, entre -90º y 90º , y si trabaja en grados centesimales … mejor cambie la opción). Dicho sea de paso: no hemos hecho ningún comentario sobre el <u>cálculo</u> de los valores de la función *arcoseno*. Se trata del mismo problema que presenta la función *seno* y para estos cálculos, entre otras tantas cuestiones, se desarrolló el cálculo infinitesimal, pero no vamos a seguir con el tema, por ahora.

Antes de volver a nuestra exponencial, recordemos que en el caso de la función *coseno*, la restricción no puede ser al intervalo $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, pues la función *coseno* no es inyectiva en dicho intervalo. La elección histórica es el intervalo $[0,\pi]$, por lo tanto la función *arcocoseno* es la inversa de $\cos_{|[0,\pi]}:[0,\pi] \longrightarrow [-1,1]$, es decir: la función $ar\cos:[-1,1] \longrightarrow [0,\pi]$ que verifica $cos(arcos(x)) = x$ para todo $x \in [-1,1]$. Por último, observe que la elección del intervalo $[0,\pi]$ es la correcta: cuando uno utiliza esta función para calcular el ángulo entre dos vectores no nulos v y w de un espacio vectorial real con producto interno, el número $ar\cos\left(\dfrac{<v,w>}{\|v\|\|w\|}\right)$ está comprendido entre 0 y π, como debe ser.

♣ *Fin Remojito*.

Ya hemos observado que la exponencial compleja no es inyectiva. Pero tampoco es sobreyectiva, pues de (7.1) se deduce inmediatamente que para todo $x + iy \in \mathbb{C}$:

$$|\exp(x+iy)| = e^x \tag{7.3}$$

Por lo tanto, la exponencial nunca se anula. ¿Será $\exp:\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} - \{0\}$ sobreyectiva? Veamos: dado $z \neq 0$, ¿existe w tal que exp(w) = z ? Sabemos que si existe, existen infinitos, por la periodicidad (7.2). Como z es no nulo, podemos utilizar su expresión polar, $z = re^{i\theta} = r\cos(\theta) + i\,rsen(\theta)$, y plantear la ecuación exp(w) = z en la forma

$e^{u+iv} = re^{i\theta}$, donde $w = u + iv$, es decir: $e^u e^{iv} = re^{i\theta}$. Se deduce de (7.3) que necesariamente $e^u = r$, es decir: $u = \ln(r) = \ln(|z|)$. Ahora nos queda $e^{iv} = e^{i\theta}$, es decir: v puede ser un argumento cualquiera de z. Por lo tanto, para cada $z \neq 0$ tenemos las infinitas soluciones

$$w_k = \ln(|z|) + i[\arg(z) + 2k\pi] \quad , \quad k \in \mathbb{Z} \tag{7.4}$$

de la ecuación

$$\exp(w) = z\,. \tag{7.5}$$

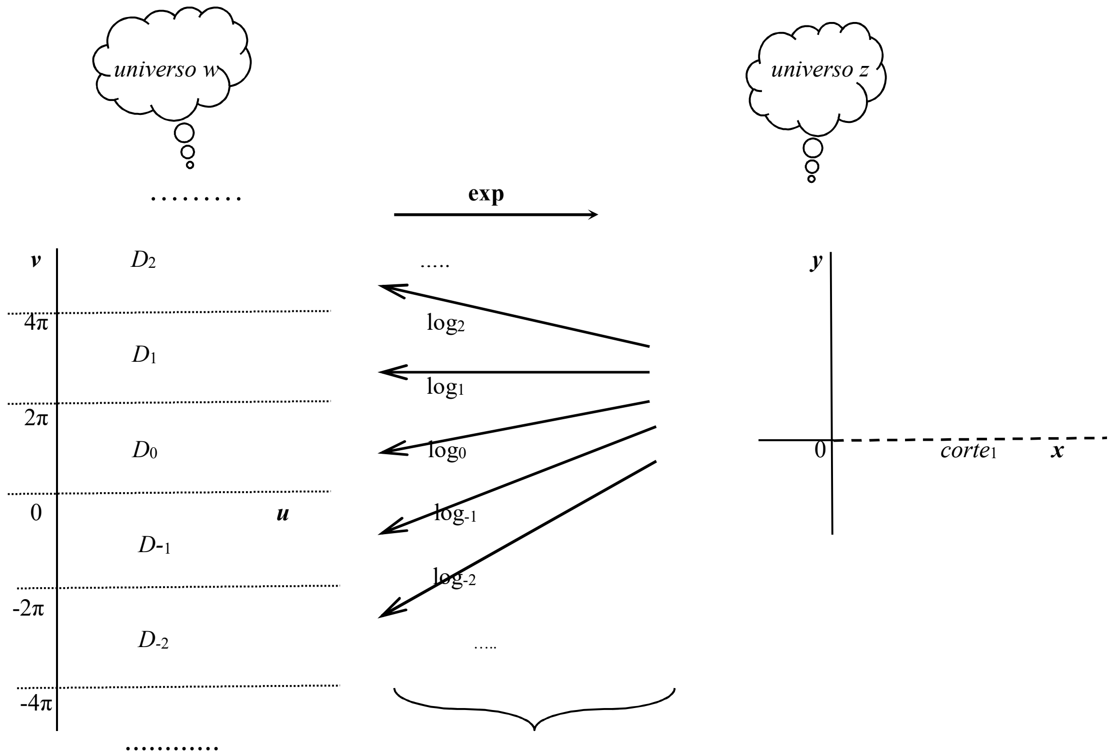
Cada una de estas soluciones w se denomina *logaritmo de z*. Por lo tanto, no solamente hemos comprobado que $\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} - \{0\}$ es sobreyectiva (equivalentemente: la ecuación (7.5) tiene solución para todo $z \neq 0$), sino que hemos detectado todas las infinitas soluciones de la ecuación. Para definir las funciones logarítmicas nos hace falta encontrar dominios del plano (los vamos a elegir abiertos desde ahora, para estudiar la derivabilidad de esas funciones) donde la ecuación tenga siempre una y una única solución. Aquí hay dos argumentos involucrados: el de z y el de la solución (7.4), a elegir. Veamos algunos ejemplos sencillos. Los detalles de las deducciones y los cálculos son sencillos y quedan a cargo del lector. A cambio, agrego un par de diagramas que ayudan (espero) a comprender la situación.

Ejemplo 1: Si elegimos $0 < \arg(z) < 2\pi$, el “universo” de z queda restringido al dominio $\mathbb{C} - corte_1$ donde $corte_1 = \{x \in \Re : x > 0\}$ (está graficado en el “universo z” de la figura 1). Ahora, para esta elección, tenemos las infinitas bandas horizontales

$$D_k = \{w \in \mathbb{C} : 2k\pi < \mathrm{Im}(w) < 2(k+1)\pi\} \quad , \; k \in \mathbb{Z} \tag{7.6}$$

(están indicadas en el “universo w” de la figura 1) para las cuales se verifica que: *cada restricción* $\exp_{|D_k} : D_k \longrightarrow \mathbb{C} - corte_1$ *es biyectiva* (ver ejercicio a continuación) Entonces, tenemos las infinitas inversas (locales) $\log_k : \mathbb{C} - corte_1 \longrightarrow D_k$ dadas por

$$\log_k(z) = \ln(|z|) + i[\arg(z) + 2k\pi] \quad , \quad k \in \mathbb{Z} \tag{7.7}$$



Las infinitas « ramas » logarítmicas para el « $corte_1$ »

Fig. 1

Ejercicio: Prueba de la biyectividad de cada $\exp_{|D_k} : D_k \longrightarrow \mathbb{C} - corte_1$:

(i) Sobreyectividad: dado $z \in \mathbb{C} - corte_1$, podemos elegir su argumento de manera que $0 < \arg(z) < 2\pi$. (Obviamente, z no puede ser nulo, sino estaría en el *corte*$_1$) entonces, el complejo $w_k = \ln(|z|) + i[\arg(z) + 2k\pi]$ pertenece a la banda D_k, pues $0 < \arg(z) < 2\pi$ y por lo tanto $2k\pi < \arg(z) + 2k\pi < 2(k+1)\pi$. Además

$$\exp(w_k) = \exp(\ln(|z|) + i[\arg(z) + 2k\pi]) = e^{\ln(|z|)} e^{i[\arg(z)+2k\pi]} = |z| e^{i\arg(z)} = z .$$

Hemos probado que, efectivamente, todo $z \in \mathbb{C} - corte_1$ es $\exp(w_k)$ para algún $w_k \in D_k$.

(ii) Inyectividad: Sean $w = a + ib$ y $w' = a' + ib'$ dos elementos de D_k tales que $\exp(w) = \exp(w')$, es decir: $e^{a+ib} = e^{a'+ib'} \therefore e^a e^{ib} = e^{a'} e^{ib'}$. Tomando módulos en ambos miembros se tiene $e^a = e^{a'}$. Como la exponencial <u>real</u> es inyectiva (Análisis I: su derivada es siempre positiva y por lo tanto es estrictamente creciente en toda la recta), se deduce que $a = a'$. Nos queda entonces que $e^{ib} = e^{ib'}$, lo que significa que existe un entero m tal que $b' - b = 2m\pi$. Pero $w = a + ib$ y $w' = a' + ib'$ son dos elementos de $D_k = \{w \in \mathbb{C} : 2k\pi < \operatorname{Im}(w) < 2(k+1)\pi\}$, por lo tanto $2k\pi < b < 2k\pi + 2\pi$ y también $2k\pi < b' < 2k\pi + 2\pi$, resulta $-2k\pi - 2\pi < -b < -2k\pi$ y entonces

$$-2\pi = 2k\pi - 2k\pi - 2\pi < b' - b = 2m\pi < 2k\pi + 2\pi - 2k\pi < 2\pi$$

Es decir: $-2\pi < 2m\pi < 2\pi \therefore -1 < m < 1$ y como m es entero, la única posibilidad es m = 0. Por lo tanto, hemos demostrado que $a = a'$ y que $b = b'$, es decir, que $w = a + ib$ = $w' = a' + ib'$.

Más adelante veremos una forma de "visualizar" la biyectividad de estas restricciones, cuando estudiemos algunos aspectos geométricos de la exponencial.

Cada una de estas inversas (7.7) se denomina *función logarítmica* o *rama logarítmica*. Todas ellas verifican $\exp(\log_k(z)) = z$ para todo $z \in \mathbb{C} - corte_1$, como se puede verificar fácilmente, y cada una es una biyección $\log_k : \mathbb{C} - corte_1 \longrightarrow D_k$. Lo que distingue a cada una de estas ramas logarítmicas es el codominio (todas tienen el mismo dominio: $\mathbb{C} - corte_1$).

***Advertencia* 1**: La notación utilizada en este ejemplo para las ramas logarítmicas no la volveremos a utilizar: no es universal, ni internacional, ni nacional, ni provincial ni municipal. En general se denomina *logaritmo* y se indica *log* a cualquiera de las ramas logarítmicas del ejemplo anterior y a todas las correspondientes a cualquier otro corte. Hay notaciones y denominaciones más confusas, pero mejor no las mencionamos, para no atraerlas.

Observación* 7.1*: El dominio $\mathbb{C} - corte_1$ es un abierto donde quedan bien definidas todas estas ramas logarítmicas, y es un abierto maximal con esta propiedad, es decir: no es posible elegir un abierto que contenga estrictamente a $\mathbb{C} - corte_1$ donde las ramas logarítmicas queden bien definidas y sean holomorfas. Si extendemos el dominio a $\mathbb{C} - \{0\}$, las ramas logarítmicas no resultarían continuas, por no serlo la función argumento (Ejercicio 6 TP 2). Para convencerse, tómese por ejemplo, la función $\log : \mathbb{C} - \{0\} \longrightarrow \{w \in \mathbb{C} : 0 \le \operatorname{Im}(w) < 2\pi\}$ tal que $\log(z) = \ln(|z|) + i\arg(z)$ (donde $0 \le \arg(z) < 2\pi$, necesariamente). Es una extensión de la rama logarítmica $\log_0$ del Ejemplo 1 y no es continua en ningún punto x_0 de $corte_1 = \{x \in \Re : x > 0\}$, por la discontinuidad de la función argumento ya mencionada.

***Observación* 7.2**: con ninguna de las ramas logarítmicas del Ejemplo 1 puede calcularse el logaritmo de un número real positivo, pues éstos están fuera del dominio de todas ellas. Sin embargo, podemos calcular logaritmos de reales negativos. Por ejemplo:

$$\log_0(-9)=\ln(9)+i\pi\,,\ \ \log_1(-9)=\ln(9)+i3\pi\,,\ \ \log_2(-9)=\ln(9)+i5\pi\,,$$
$$\log_{-1}(-9)=\ln(9)-i\pi\,,\ \ \log_{-2}(-9)=\ln(9)-i3\pi\,,\ \ldots$$

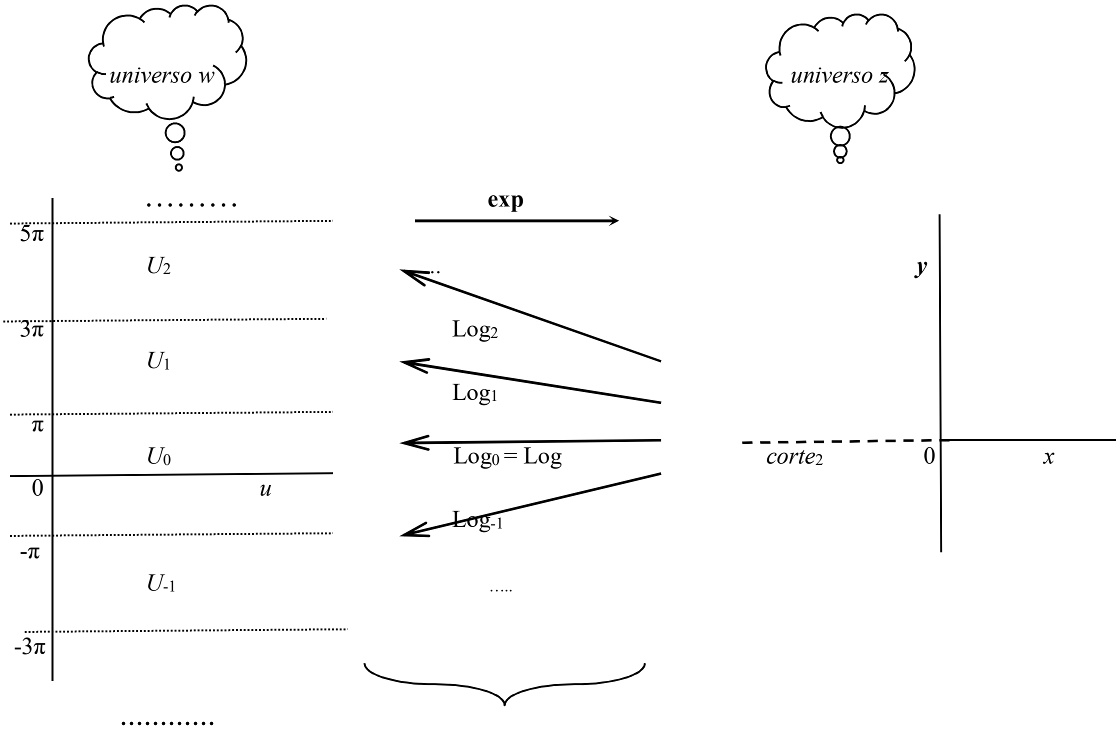
Sin embargo, si a usted le sigue molestando no poder calcular logaritmos de números reales positivos, le parecerá más natural la elección siguiente.

Ejemplo 2: Si elegimos $-\pi < Arg(z) < \pi$, z queda restringido al dominio $\mathbb{C}-corte_2$ donde $corte_2=\{x\in\Re : x\le 0\}$ (está graficado en el "universo z" de la figura 2). Ahora, para esta elección, tenemos las infinitas bandas horizontales

$$U_k=\{w\in\mathbb{C} : (2k-1)\pi<\operatorname{Im}(w)<(2k+1)\pi\}\ \ ,\ k\in\mathbb{Z} \tag{7.8}$$

(están indicadas en el "universo w" de la figura 2) para las cuales se verifica que cada restricción $\exp_{|D_k} : U_k \longrightarrow \mathbb{C}-corte_2$ es biyectiva (la prueba de esto es totalmente análoga a la del ejemplo anterior). Entonces, tenemos las infinitas inversas (locales) $\log_k : \mathbb{C}-corte_1 \longrightarrow U_k$ dadas por

$$Log_k(z)=\ln(|z|)+i[Arg(z)+2k\pi]\qquad ,\quad k\in\mathbb{Z} \tag{7.9}$$



Las infinitas « ramas » logarítmicas para el « corte2 »

Fig. 2

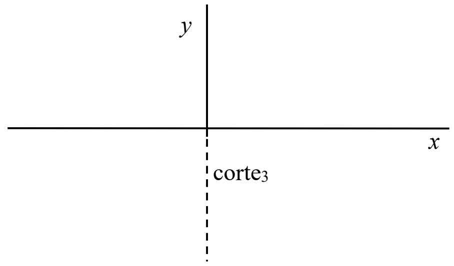
Cada una de estas inversas (7.8) también se denomina *función logarítmica* o *rama logarítmica*. Todas ellas verifican $\exp(Log_k(z)) = z$ para todo $z \in \mathbb{C} - corte_2$, como se puede verificar fácilmente, y cada una es una biyección $Log_k : \mathbb{C} - corte_2 \longrightarrow U_k$. Lo que distingue a cada una de estas ramas logarítmicas es el codominio (todas tienen el mismo dominio: $\mathbb{C} - corte_2$). La notación utilizada en este ejemplo tampoco volverá a utilizarse, dado que no es universal, ni internacional,… La utilización de Log en lugar de log para distinguir las ramas logarítmicas producidas por el corte 2 se debe a que la única convención universal es la designación del logaritmo Log_0 de este ejemplo como *logaritmo principal* y la utilización de la notación Log para el mismo, notación que hemos introducido en la figura 2. Tampoco es casual la notación para el argumento con mayúscula, dado que se trata del *argumento principal*. Es decir:

***Definición* 7.3**: se define como *logaritmo principal* a la función $Log : \mathbb{C} - \Re_{\leq 0} \longrightarrow U_0$ tal que $Log(z) = \ln(|z|) + iArg(z)$ para cada $z \in \mathbb{C} - \Re_{\leq 0}$, siendo $\Re_{\leq 0} = \{x \in \Re : x \leq 0\}$ y $U_0 = \{w \in \mathbb{C} : -\pi < \mathrm{Im}(w) < \pi\}$ (es decir: *Arg* es *argumento principal*).

Si a usted le llama la atención el privilegio otorgado a esta rama logarítmica mediante esta denominación, piense que para cada número real positivo *x*, se verifica Log(*x*) = ln(*x*), es decir: el logaritmo principal extiende el logaritmo real al dominio complejo $\mathbb{C} - \Re_{\leq 0}$, de la misma manera que la exponencial compleja es una extensión de la exponencial real al plano complejo. Veremos otras extensiones de este tipo en este capítulo y, más adelante demostraremos que estas extensiones son únicas.

Algunos ejemplos de cuentitas con estos logaritmos del ejemplo 2: el módulo del complejo 1 + *i* es $\sqrt{2}$ y su argumento principal es $\frac{\pi}{4}$. Entonces: $Log(1+i) =$ $= \ln(\sqrt{2}) + i\frac{\pi}{4}$ (que como todos sabemos desde nuestra más tierna infancia, es igual a $\frac{\ln(2)}{2} + i\frac{\pi}{4}$) ; $Log_1(1+i) = \ln(\sqrt{2}) + i\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi\right)$; $Log_{-1}(1+i) = \ln(\sqrt{2}) + i\left(\frac{\pi}{4} - 2\pi\right)$; $Log_2(1+i) = \ln(\sqrt{2}) + i\left(\frac{\pi}{4} + 4\pi\right)$; $Log_{-2}(1+i) = \ln(\sqrt{2}) + i\left(\frac{\pi}{4} - 4\pi\right)$; etc

A esta altura, ya podría quedar claro que los dos “cortes” que hemos considerado no son los únicos posibles. Por ejemplo, a mi tía Zulma, del Barrio Pocitos, de Montevideo, se le ocurrió (hace mucho tiempo) calcular el logaritmo de 1 y de -1 con un mismo logaritmo. Yo era muy chiquito y no pude ayudarla. Hoy, podría decirle que utilice una rama logarítmica asociada al siguiente corte:



Seguramente mi tía Zulma no sabría cómo seguir, pues no había cursado Análisis III. ¿Pueden ayudarla?

Una función biyectiva es, obviamente, localmente inversible. Pero una función puede ser localmente inversible (en todo su dominio) sin ser biyectiva. Un ejemplo es la exponencial, y es un ejemplo muy importante. Uno de los teoremas más importantes del siglo XIX es el que se conoce como *Teorema de Inversibilidad Local*, y su demostración es realmente extensa y delicada. Su enunciado es el siguiente: toda función $f: D \longrightarrow \Re^n$ de clase C^k ($k \geq 1$) en un abierto $D \subseteq \Re^n$ es localmente inversible en torno de cada punto $x_0 \in D$ donde su matriz jacobiana es inversible, y sus inversas locales en torno de estos puntos son, también, de clase C^k. Tal vez usted lo recuerda de su paso por Análisis II, aunque es más probable que recuerde uno de sus corolarios más famosos: el Teorema de la Función Implícita. En Análisis I se estudia el caso $n = 1$, donde la matriz jacobiana no es otra cosa que la derivada de la función. En el análisis de variable compleja no solo subsiste este teorema sino que admite una versión más fuerte que mencionaremos a continuación:

Teorema de Inversibilidad Local (para variable compleja): Sea $f: D \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfa en un abierto $D \subseteq \mathbb{C}$. Entonces, f es localmente inversible en torno cada punto $z_0 \in D$ tal que $f'(z_0) \neq 0$, y sus inversas locales en torno de dichos puntos son, también, holomorfas. ■

Momento cultural: En análisis de variable compleja es válida la recíproca. Más precisamente: si una función holomorfa es inyectiva en un dominio abierto, entonces su derivada no se anula en ningún punto de dicho dominio. Este hecho no es para nada trivial y no vale para funciones de variable real, como se puede ver con la función de clase C^∞ $f: \Re \longrightarrow \Re$ tal que $f(x) = x^3$. Es claramente inyectiva en toda la recta y sin embargo su derivada se anula en $x = 0$.

Como hemos dicho, la demostración del teorema de inversibilidad local no es corta ni sencilla. Una de las partes más delicadas es la demostración de que las inversas locales son continuas. Para el caso de la exponencial, cuya derivada no se anula en ningún punto, nosotros no hemos hecho uso de este teorema para probar la existencia de las inversas locales. Lo hemos hecho "a pulmón" (en realidad, hemos encontrado algunas, no todas). Lo que sí vamos a utilizar del teorema es que las inversas locales son holomorfas y calcular sus derivadas: sea $\log : D \longrightarrow \mathbb{C}$ una inversa local cualquiera de la exponencial, definida en un abierto D (que no puede contener al 0, pues 0 no está en la imagen de la exponencial). Entonces, para todo $z \in D$:

$$\exp(\log(z)) = z \Rightarrow \exp'(\log(z))\log'(z) = 1 \Rightarrow \quad \overbrace{\exp(\log(z))}^{=z}\log'(z) = 1 \Rightarrow \log'(z) = \frac{1}{z}$$

Es una cuenta extremadamente sencilla, pero para poder hacerla hemos asumido previamente que *log* era holomorfa. Para el caso de los logaritmos, podríamos haber probado que son funciones holomorfas y haber calculado sus derivadas aplicando el Teorema de Cauchy-Riemann a las componentes real e imaginaria de sus expresiones (7.7) o (7.9), pero el procedimiento que acabamos de utilizar es mucho más general: <u>escriba usted el enunciado previo al siguiente cálculo</u>, que utiliza el teorema anterior y la "regla de la cadena":

$$f(g(z)) = z \Rightarrow f'(g(z))g'(z) = 1 \Rightarrow \quad g'(z) = \frac{1}{f'(g(z))} \tag{7.10}$$

Esto lo utilizaremos en el ítem siguiente.

***Advertencia* 2**: Hasta el momento no he dado la definición de "corte" en general, y no pienso hacerlo en estos apuntes. Solamente mencionaré lo que denominamos "corte" en cada ejemplo concreto. El concepto preciso de *corte*, asociado a una función holomorfa localmente inversible, escapa largamente al alcance de este curso, pues involucra conceptos de topología y geometría diferencial no triviales. En el caso de las funciones logarítmicas, un *corte* es cualquier curva simple que une el origen con el punto del infinito. Los ejemplos que vimos son semirrectas que nacen en el origen, que son las más sencillas. Pero podría ser un arco de parábola, de sinusoide, espiral, etc. Por la misma razón, no voy a definir el concepto de "punto de ramificación"; me limitaré a mencionar, en cada ejemplo, cuál es o cuáles son los puntos de ramificación. En el caso del logaritmo, su punto de ramificación es el origen, pues todos los cortes posibles deben originarse en este punto. Por razones muy distintas no voy a utilizar el término "función multiforme". Esta expresión me resulta imposible de digerir (no soy el único), por mucho esfuerzo que haga. Se suele utilizar esta expresión para designar, por ejemplo, a "la función logarítmica", que a cada complejo $z \neq 0$ le asignara la lista infinita de valores

$\ln(|z|) + i[\arg(z) + 2k\pi]$, donde *k* puede ser un entero cualquiera (y el arg(*z*), también, puede ser cualquier argumento de *z*). Lo mismo se suele hacer con la función $\sqrt{\ }$, en el campo real, asignándole dos valores para cada real positivo, por ejemplo $\sqrt{4} = \pm 2$. Esto significa, entre otras cosas, confundir una ecuación con una función. El conjunto de soluciones de la ecuación $x^2 - 4 = 0$ es $\{-2,2\}$, pero $\sqrt{4}$ es 2, no "± 2". No habría ningún problema en definir una función $f:(0,+\infty) \longrightarrow \Re^2$ tal que $f(x) = (-\sqrt{x}, \sqrt{x})$, pero con esta función no se puede operar como con la función $\sqrt{\ }:(0,+\infty) \longrightarrow \Re$. Por ejemplo, no tiene ningún sentido la igualdad "$[f(4)]^2 = 4$". No es el único problema, pero voy a terminar esta advertencia citando un parágrafo de un libro escrito por uno de los matemáticos más importantes del siglo XX, Jean Dieudonné: "*Tal como se anunció en el capítulo* I*, el lector no hallará en este capítulo las llamadas funciones "a valores múltiples" o "multiformes". Es evidentemente muy incómodo no poder definir en el cuerpo* $\mathbb{C}$ *una genuina función* $\sqrt{z}$ *que satisfaga la relación* $(\sqrt{z})^2 = z$ *; pero la solución de esta dificultad no puede hallarse en una perversión deliberada del concepto general de función, por la que se decreta súbitamente que existe una tal "función", la cual, sin embargo, tiene la singular propiedad de tener, para cada* $z \neq 0$ <u>*dos*</u> *"valores" distintos. El castigo a esta conducta tonta e incorrecta es inmediato; es imposible efectuar con seguridad y de manera razonable las operaciones algebraicas más sencillas; por ejemplo, la relación* $2\sqrt{z} = \sqrt{z} + \sqrt{z}$ *es evidentemente* <u>*no cierta*</u>*, pues partiendo de la "definición" de* $\sqrt{z}$ *se pueden atribuir para* $z \neq 0$ <u>*dos*</u> *valores distintos al primer miembro y tres valores distintos al segundo. Afortunadamente* <u>*hay*</u> *una solución a esta dificultad, que elimina este absurdo; fue descubierta hace más de cien años por Riemann, y consiste en restablecer la unidad del valor de* $\sqrt{z}$ *"doblando", por así decirlo, el dominio de la variable z, de manera que los dos valores de* $\sqrt{z}$ *corresponden a dos puntos diferentes en lugar de a una z única. Es un rasgo genial que da origen a la gran teoría de las superficies de Riemann, y a su generalización moderna, las variedades complejas* ". El título original del libro es "*Topology*", y la cita es de la página 193 de la edición en castellano de la Editorial Reverté, 1974, con el título "*Fundamentos del análisis moderno*".

El alumno no debe sentirse incómodo por no saber qué son las *superficies de Riemann*, los *cortes* y los *puntos de ramificación*. No son temas sencillos y <u>no serán temas de exámenes de esta materia</u>. Cuando se encuentre con el término "uniformizar", en algún ejercicio de la práctica, lo que tiene que entender es que lo único que tiene que hacer es elegir una inversa local de alguna función. Las únicas funciones que vamos a encontrar en el fondo de estos problemas son logaritmos y raíces (que son las que estamos dando aquí; las raíces ya vienen). Por ejemplo: se le pide "uniformizar" la función $f(z) = \log(1 - z^2)$. Esta función es la composición de un logaritmo con una polinómica, $P(z) = 1 - z^2$, es decir: $f = \log \circ P$. Lo único que hay que "uniformizar" aquí es el logaritmo, pues P es una función "uniforme", es decir: una función. Entonces, lo primero que tiene que hacer es elegir su logaritmo preferido, por ejemplo el principal, Log, cuyo dominio es $\mathbb{C}-\Re_{\leq 0}$. Ahora, para poder componer $Log \circ P$, debe restringir el dominio de P al conjunto $\{z \in \mathbb{C} : P(z) \notin \Re_{\leq 0}\}$, y ésta es la parte del ejercicio donde hay que hacer alguna cuenta y algún dibujito. Lo que se le pide, entonces, es elegir un logaritmo y determinar el dominio de la composición $f = \log \circ P$.

Hemos terminado con las elementales básicas. Ahora, veamos las funciones elementales en general, que son todas las que se obtienen a partir de las básicas mediante combinaciones lineales, productos, restricciones, composiciones e inversas locales.

Ejemplos importantes:

1) ***Potencias*** (enteras positivas): para cada entero positivo *n*, sea $p_n : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $p_n(z) = z^n$. Es el producto de la identidad por sí misma *n*-veces: $p_n = Id^n$. Sabiendo que la identidad es holomorfa y que su derivada es la constante 1, se deduce inmediatamente que cada p_n es holomorfa con derivada $p_n'(z) = nz^{n-1}$.

2) ***Raíces***: son las inversas locales de las potencias. Por el Teorema de Inversibilidad local, sabemos que las inversas locales de p_n, que se indican $\sqrt[n]{}$, existen en torno de cada $z_0 \neq 0$ y que son holomorfas. El cálculo de sus derivadas se puede hacer utilizando el algoritmo (7.10):

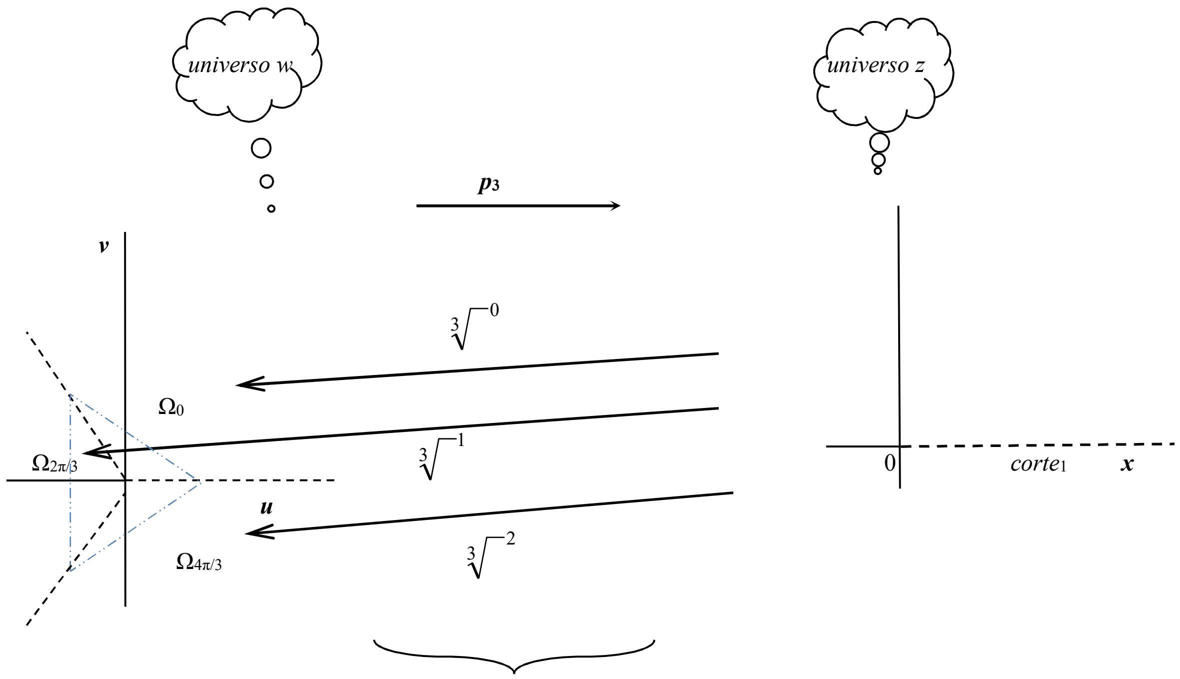
$$(\sqrt[n]{z})' = \frac{1}{p_n'(\sqrt[n]{z})} = \frac{1}{n(\sqrt[n]{z})^{n-1}}$$

Achtung! Warning! Atenção! ¡Ojo! *A pesar de lo parece indicar la notación, esta cuenta solamente es válida en el dominio de definición de cada inversa local* $\sqrt[n]{}$ *. No existe una función raíz n-ésima en* $\mathbb{C}-\{0\}$.

Veamos algunas raíces cúbicas, por ejemplo, que no son otra cosa que las inversas locales de la potencia cúbica $p_3 : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, dada por $p_3(w) = w^3$ para todo $w \in \mathbb{C}$. Esta función no es inyectiva, obviamente, pues para cualquier complejo no nulo z existen tres complejos distintos w_0, w_1 y w_2 (las tres raíces cúbicas de z), tales que $p_3(w_0) =$ $= p_3(w_1) = p_3(w_2) = z$. Ahora bien, la relación entre estas tres raíces es muy sencilla: si $z = re^{i\theta}$ y $w_0 = \sqrt[3]{r}e^{i\frac{\theta}{3}}$, entonces $w_1 = z_0 e^{i\frac{2\pi}{3}}$ y $w_2 = z_0 e^{i\frac{4\pi}{3}}$. Es decir: los tres números complejos w_0, w_1 y w_2 en los que p_3 toma el mismo valor $z \neq 0$, tienen el mismo módulo y se obtienen a partir de uno de ellos, por ejemplo w_0, mediante dos rotaciones sucesivas en torno de 0 en un ángulo $\frac{2\pi}{3}$ (en sentido anti-horario). Si le aplicamos esta rotación a w_2, obtenemos w_0, pues $w_2 e^{i\frac{2\pi}{3}} = w_0 e^{i\frac{4\pi}{3}} e^{i\frac{2\pi}{3}} = w_0 e^{i2\pi} = w_0$. Dicho de otra manera: los puntos w_0, w_1 y w_2 son los tres vértices de un triángulo equilátero centrado en el origen. Con un poco de imaginación, esto nos permite deducir que p_3 es inyectiva en cada sector angular (abierto) con vértice en el origen y amplitud $\frac{2\pi}{3}$:

$$\Omega_\alpha = \left\{ w \in \mathbb{C} - \{0\} : \alpha < \arg(w) < \alpha + \frac{2\pi}{3} \right\} \tag{7.11}$$

donde α es ángulo cualquiera. (Como siempre, elegimos dominios abiertos para el estudio de derivabilidad). La inyectividad de $p_{3|\Omega_\alpha}$ puede demostrarse detalladamente como en el ejercicio de página 6, y dejamos la demostración como ejercicio. A cambio, va un dibujito donde aparece el plano complejo (el "universo w") divido en tres sectrores angulares.



Las tres raíces cúbicas correspondientes al « corte$_1$ »

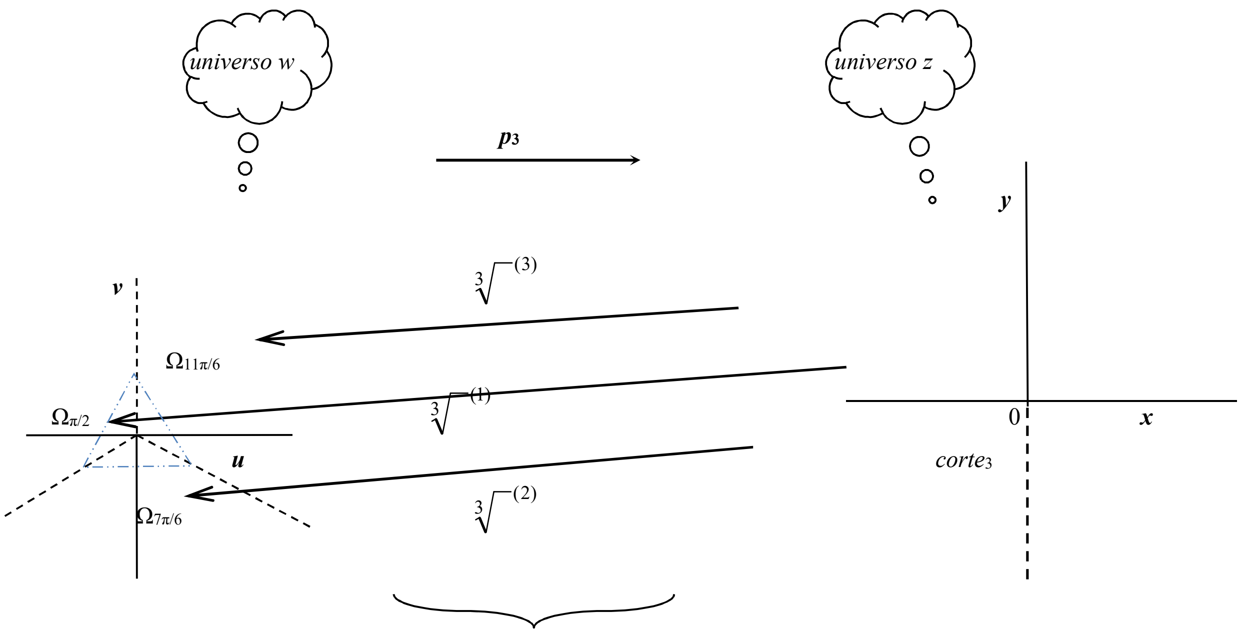
Fig. 3

Las tres restricciones $p_{3|\Omega_0} : \Omega_0 \longrightarrow \mathbb{C} - corte_1$, $p_{3|\Omega_{2\pi/3}} : \Omega_{2\pi/3} \longrightarrow \mathbb{C} - corte_1$ y $p_{3|\Omega_{4\pi/3}} : \Omega_{4\pi/3} \longrightarrow \mathbb{C} - corte_1$ son biyectivas y por lo tanto se tienen las tres inversas locales de estas restricciones: $\sqrt[3]{}^{0} : \mathbb{C} - corte_1 \longrightarrow \Omega_0$, $\sqrt[3]{}^{1} : \mathbb{C} - corte_1 \longrightarrow \Omega_{2\pi/3}$ y

$\sqrt[3]{\ }^{2} : \mathbb{C} - corte_1 \longrightarrow \Omega_{4\pi/3}$. Usted puede comprobar esto observando que efectivamente cada complejo $z \in \mathbb{C} - corte_1$ tiene una raíz cúbica en Ω_0, otra en $\Omega_{2\pi/3}$ y la tercera en $\Omega_{4\pi/3}$. Estas tres raíces son , precisamente, $\sqrt[3]{z}^{0}$, $\sqrt[3]{z}^{1}$ y $\sqrt[3]{z}^{2}$. Por ejemplo: si $z = 8i$, entonces $\sqrt[3]{8i}^{0} = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$, $\sqrt[3]{8i}^{1} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right)}$ y $\sqrt[3]{8i}^{2} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3}\right)}$. Se sugiere marcar estas tres raíces en el "universo *w*" de la figura 3, y comprobar que efectivamente, se ubican en sectores angulares distintos. Ahora, tomemos el caso de $z = 8$, ubicado en el $corte_1$. Las tres raíces cúbicas de 8 se ubican en los vértices del triángulo azul de la figura 3, es decir: 2, $2e^{\frac{2\pi}{3}i}$ y $2e^{\frac{4\pi}{3}i}$. Si uno quisiera extender el dominio de $\sqrt[3]{\ }^{0}$ (por ejemplo) como para poder incluir 8 en su dominio, tendríamos un serio inconveniente: no sería continua, pues por un lado tenemos $\underset{\theta \to 2\pi-}{Lim} \sqrt[3]{8e^{i\theta}} = \underset{\theta \to 2\pi-}{Lim} 2e^{i\frac{\theta}{3}} = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$ y por otro lado

$\underset{\theta \to 0+}{Lim} \sqrt[3]{8e^{i\theta}} = \underset{\theta \to 0+}{Lim} 2e^{i\frac{\theta}{3}} = 2$. Es decir: no hay forma de asignarle un valor a $\sqrt[3]{\ }^{0}$ en 8 de manera que resulte continua. Lo mismo ocurre con todos los puntos del corte y con las otras dos raíces cúbicas asociadas a ese corte.

De la misma manera que con los logaritmos, con ninguna de estas tres raíces podemos calcular la raíz cúbica de 1. Como ya puede ir sospechando, esto se resuelve con otro corte, por ejemplo el $corte_2$ que utilizamos con los logaritmos, o bien este corte, del cual le dejamos un retrato (una "selfie"…) para que usted complete el resto.



Las tres raíces cúbicas correspondientes al « $corte_3$ »

Fig. 4

Un consejo para completar los detalles: elija un punto del corte3 y ubique sus tres raíces cúbicas en el "universo *w*". Uno muy cómodo para elegir es -*i*. Sus tres raíces cúbicas son los vértices del triángulo azul. Con estos datos, ya tiene el resto.

Para terminar con este ejemplo, un par de acotaciones finales y un "resuelto":

(a) aquí también rige la Advertencia 1 (página 6): la notación que se utilizó para las raíces cúbicas no es universal y no volverá a utilizarse. La notación convencional es $\sqrt[3]{}$, sin ningún agregado. El contexto en el que se utiliza debe dejar claro cuál es el corte y la rama que se está considerando. Esto vale, obviamente, para las raíces *n*-ésimas en general. Ver el ejercicio resuelto a continuación.

(b) Los "cortes" para las raíces *n*-ésimas son los mismos que para los logaritmos: curvas simples que unen el origen con el punto del infinito. También, para las raíces *n*-ésimas hay un punto de ramificación, que es 0. La gran diferencia entre logaritmos y raíces es que para cada corte hay infinitos logaritmos pero una cantidad finita (= *n*) de raíces *n*-ésimas.

Ejercicio resuelto: La función $\sqrt[4]{}$ está definida en $\mathbb{C}-\{iy : y \le 0\}$ y verifica $\sqrt[4]{-1} = e^{i\frac{3}{4}\pi}$ Calcular $\sqrt[4]{1}$.

Resolución (excesivamente detallada). Comenzamos con un dibujito de la situación:

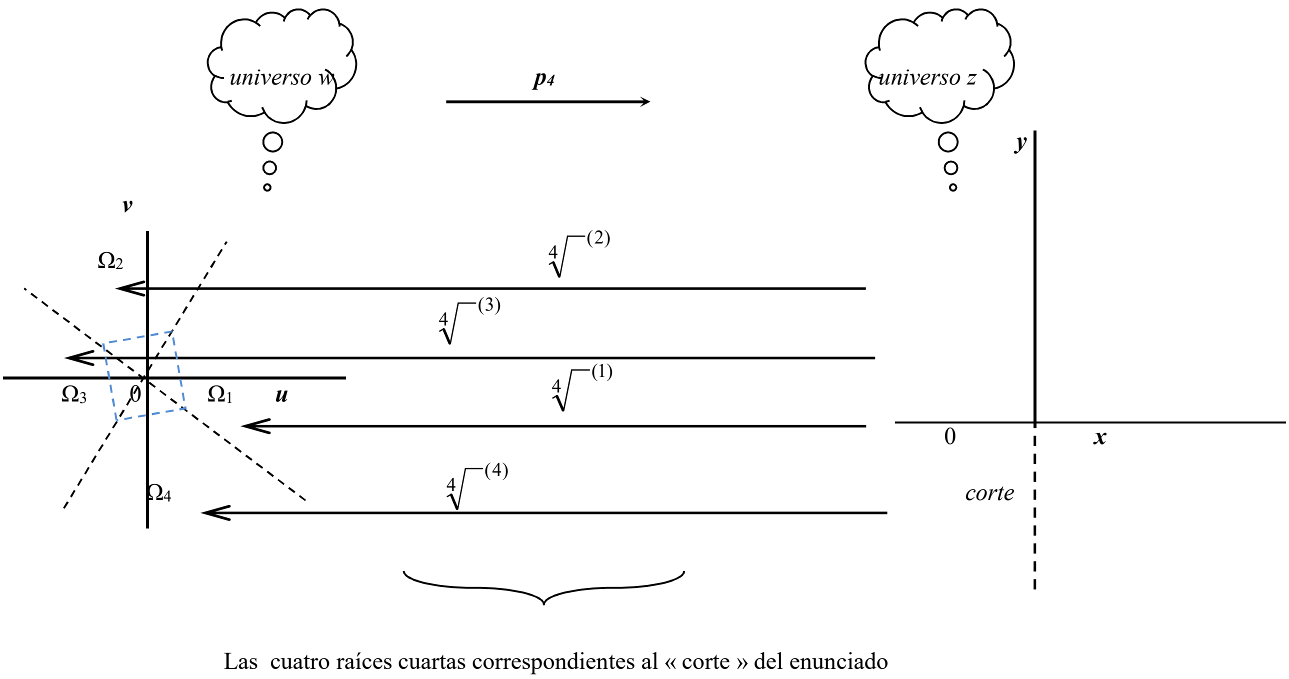


Fig. 5

La función $\sqrt[4]{\ }$ es una inversa local de la potencia cuarta $p_4(w) = w^4$. El enunciado deja bien claro cuál es el corte: $\{iy : y \leq 0\}$. Los cuatro sectores angulares Ω (del "universo w") tales que las restricciones $p_{4|\Omega} : \Omega \longrightarrow \mathbb{C} - \{iy : y \leq 0\}$ son biyectivas están determinados por las cuatro raíces cuartas de -*i* (o de cualquier otro punto del corte) y son los vértices del cuadrado azul del "universo w" : $e^{i\frac{3\pi}{8}}$, $e^{i\left(\frac{3\pi}{8}+\frac{2\pi}{4}\right)} = e^{i\frac{7\pi}{8}}$, $e^{i\left(\frac{3\pi}{8}+\frac{4\pi}{4}\right)} = e^{i\frac{11\pi}{8}}$ y $e^{i\left(\frac{3\pi}{8}+\frac{6\pi}{4}\right)} = e^{i\frac{15\pi}{8}}$. Ahora, para saber cuál de las cuatro ramas es la raíz buscada, tenemos el dato $\sqrt[4]{-1} = e^{i\frac{3}{4}\pi i}$. Cada $z \in \mathbb{C} - \{iy : y \leq 0\}$ tiene una única raíz cuarta en cada uno de los sectores angulares Ω_1, Ω_2, Ω_3 y Ω_4. En nuestro caso, la raíz de $-1 \in \mathbb{C} - \{iy : y \leq 0\}$ que calcula la raíz cuarta del enunciado es $e^{i\frac{3}{4}\pi}$, que está ubicada en el sector Ω_2, pues $\frac{3\pi}{8} < \frac{3\pi}{4} < \frac{7\pi}{8}$. Por lo tanto, la raíz definida por el enunciado es $\sqrt[4]{\ } = \sqrt[4]{\ }^{(2)} : \mathbb{C} \longrightarrow \Omega_2 = \left\{ w \in \mathbb{C} - \{0\} : \frac{3\pi}{8} < \arg(w) < \frac{7\pi}{8} \right\}$. Todas las raíces cuartas que calculemos con esta raíz deben estar en este sector angular Ω_2 y sabemos que para cada $z \in \mathbb{C} - \{iy : y \leq 0\}$ existe una única raíz cuarta en Ω_2. Finalmente, nos piden calcular $\sqrt[4]{1}$, y ahora esto es la parte más sencilla de la resolución: las cuatro raíces cuartas de 1 son 1, *i*,-1 y -*i*. La que pertenece a Ω_2 es *i*, por lo tanto la respuesta es $\sqrt[4]{1} = i$. Desde ya que no es necesario todo este desarrollo para llegar a esta respuesta, y hay otras formas de resolver este ejercicio. Pero lo que sí es indispensable es entender lo que se está haciendo y qué significa la respuesta.

Hasta ahora hemos visto las elementales básicas [la constante 1, la identidad, la inversión, la exponencial y sus inversas locales (los logartimos)], las potencias y sus inversas locales (las raíces). Sigamos ahora con otras funciones elementales muy importantes (algunas ya fueron presentadas).

3) ***Polinomios***: son combinaciones lineales de las potencias. Por lo tanto son holomorfas y sabemos cómo derivarlas (ya lo hemos visto en los capítulos anteriores)

4) ***Racionales***: Una función racional es (por definición) un cociente de polinomios, *P*/*Q*, donde *Q* no es el polinomio nulo, obviamente, y el dominio de esta función es, también obviamente, el plano complejo sin las raíces *Q*. En ese dominio, que es abierto, tenemos la expresión $P/Q = P.(J \circ Q)$, donde *J* es la inversión, elemental básica ya presentada. Por lo tanto, cada racional *P*/*Q* es holomorfa en su dominio y también sabemos cómo derivarla. Ejemplos importantes de funciones racionales son las homografías, que son

cocientes de polinomios de grado 0 o 1. Las estudiaremos desde un punto de vista geométrico más adelante.

5) ***Algebraicas elementales***: Las funciones algebraicas elementales son las composiciones de racionales con raíces. [Esta no es la definición de función algebraica, que no se dará aquí, sino de función algebraica *elemental*]. Como ejemplos importantes se pueden mencionar los siguientes: dado un polinomio $f(z) = c_0 + c_1 z^2 + ... + c_m z^m$ y una raíz n-ésima $\sqrt[n]{\ }$, las composiciones $f(\sqrt[n]{z}) = c_0 + c_1(\sqrt[n]{z})^2 + ... + c_m(\sqrt[n]{z})^m$ y $\sqrt[n]{f(z)}$ son funciones algebraicas. Estas funciones son holomorfas, pues las racionales y las raíces lo son, y obsérvese que sus dominios pueden ser bastante complicados. También sabemos cómo calcular sus derivadas.

6) ***Trascendentes elementales***: Históricamente, el adjetivo "trascendente", en matemática, se aplicó originalmente a cualquier número o función cuya definición misma trascendiera los métodos del álgebra y que requiriera las herramientas del análisis. Un ejemplo típico es el número *e*, cuya definición utiliza necesariamente del concepto de límite de una sucesión o de suma de una serie infinita. Del mismo modo, las funciones trascendentes son las que requieren el uso de límites y/o series. Las trascendentes denominadas elementales son básicamente combinaciones lineales de la exponencial compuesta con polinomios y sus inversas locales. Los ejemplos más importantes (además de la exponencial misma y los logartimos) son:

6.1) Las funciones circulares: están definidas por las mismas series de potencias que en el campo real:

$$sen(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} = z - \tfrac{1}{3!}z^3 + \tfrac{1}{5!}z^5 - \tfrac{1}{7!}z^7 + ...$$

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} = 1 - \tfrac{1}{2!}z^2 + \tfrac{1}{4!}z^4 - \tfrac{1}{6!}z^6 + ... \qquad (7.12)$$

Estas series de potencias tienen radio de convergencia infinito (ejercicio muy sencillo) y por lo tanto definen funciones holomorfas en todo el plano. Derivando término a término tenemos

$$sen'(z) = \cos(z) \quad , \ \cos'(z) = -sen(z) \qquad (7.13)$$

Utilizando la exponencial $\exp(z) = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{1}{n} z^n$ se deduce fácilmente (hacerlo o leer la clase 0, página 12) que $e^{iz} + e^{-iz} = 2\cos(z)$ y $e^{iz} - e^{-iz} = 2isen(z)$, es decir:

$$sen(z)=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} \quad \text{y} \quad \cos(z)=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \tag{7.14}$$

para todo complejo *z*. Obsérvese que a partir de (7.14) se obtienen también las fórmulas (7.13) de manera muy sencilla. Otras fórmulas que se pueden deducir (es un ejercicio sencillo y recomendable) de (7.14) son las del seno y coseno de una suma, obteniéndose las conocidas por todos ustedes pero ahora en el campo complejo. Lo mismo que la identidad pitagórica $sen(z)^2+\cos(z)^2=1$, que resulta de una cuenta trivial a partir de (7.14). La importancia de las identidades (7.14) es inmensa pero no hay más lugar aquí para agregar más comentarios. Esperemos tener un poco más de tiempo y espacio para volver sobre estas maravillas eulerianas. Lo que sí se puede hacer es calcular las partes real e imaginaria del seno y del coseno complejos:

$$sen(x+iy)=\frac{1}{2i}[e^{i(x+iy)}-e^{-i(x+iy)}]=\frac{1}{2i}[e^{-y}e^{ix}-e^{y}e^{-ix}]=$$
$$=\frac{1}{2i}[e^{-y}(\cos(x)+isen(x))-e^{y}(\cos(x)-isen(x))]=$$
$$=\frac{1}{2i}[isen(x)(e^{y}+e^{-y})-\cos(x)(e^{y}-e^{-y})]=sen(x)\overbrace{\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}}^{\cosh(y)}+i\cos(x)\overbrace{\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}}^{senh(y)}$$

(si usted no se acordaba de las funciones hiperbólicas, puede chusmear en el item siguiente y volver). Cuentas análogas se pueden hacer para el coseno, obteniéndose, en resumen:

$$\begin{aligned} sen(x+iy)&=sen(x)ch(y)+i\cos(x)sh(y)\\ \cos(x+iy)&=\cos(x)ch(y)-isen(x)sh(y)\end{aligned} \tag{7.15}$$

Las inversas locales de seno y coseno se denominan de la misma manera que en el campo real, *arcoseno* y *arcocoseno*. Dejamos como ejercicio el cálculo de algunas de estas inversas locales. No es un ejercicio del todo trivial. Primero hay que detectar los puntos donde se anulan las derivadas de las funciones seno y coseno para *"alejarse"* de estos puntos. Luego se procede a "despejar" *w* en función de *z* a partir de la ecuación sen(*w*) = *z* o cos(*w*) = *z* . Para esto es aconsejable utilizar las expresiones (7.14) y lo que sabemos de los logaritmos.

6.2) Las funciones hiperbólicas: están definidas por las mismas series de potencias que en el campo real:

$$senh(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\tfrac{1}{(2n+1)!}z^{2n+1}=z+\tfrac{1}{3!}z^{3}+\tfrac{1}{5!}z^{5}+\tfrac{1}{7!}z^{7}+\ldots$$

$$\cosh(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\tfrac{1}{(2n)!}z^{2n}=1+\tfrac{1}{2!}z^{2}+\tfrac{1}{4!}z^{4}+\tfrac{1}{6!}z^{6}+\ldots \qquad (7.16)$$

Estas series de potencias tienen radio de convergencia infinito (ejercicio muy sencillo) y por lo tanto definen funciones holomorfas en todo el plano. Derivando término a término tenemos

$$senh'(z)=\cosh(z) \quad , \ \cosh'(z)=senh(z) \qquad (7.17)$$

Utilizando aquí también la exponencial $\exp(z)=e^{z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}z^{n}$, se deducen fácilmente (de manera análoga al caso de las circulares) las identidadaes $e^{z}+e^{-z}=2\cosh(z)$ y $e^{z}-e^{-z}=2senh(z)$, es decir:

$$senh(z)=\frac{e^{z}-e^{-z}}{2} \quad \text{y} \quad \cosh(z)=\frac{e^{z}+e^{-z}}{2} \qquad (7.18)$$

para todo complejo *z*. Estas expresiones son las que se suelen utilizar para definir las funciones hiperbólicas en el campo real. Obsérvese que a partir de (7.18) se obtienen también las fórmulas (7.17) de manera muy sencilla. También se obtienen las siguientes relaciones entre las circulares y las hiperbólicas:

$$senh(iz)=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2}=isen(z) \quad , \quad \cosh(iz)=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=\cos(z)$$

$$sen(iz)=\frac{e^{-z}-e^{z}}{2i}=i\frac{e^{z}-e^{-z}}{2}=isenh(z), \quad \cos(iz)=\frac{e^{-z}+e^{z}}{2}=\cosh(z) \qquad (7.19)$$

Las componentes real e imaginaria se calculan fácilmente, también a partir de (7.18), (hacerlo):

$$senh(x+iy)=senh(x)\cosh(y)+i\cosh(x)sen(y)$$

$$\cosh(x+iy)=\cosh(x)\cos(y)+isenh(x)sen(y) \qquad (7.20)$$

Las inversas locales de las funciones hiperbólicas se denominan de la misma manera que en el campo real, *arcosenohiperbólico* y *arcocosenohiperbólico*. Para el cálculo de las mismas el procedimiento es totalmente análogo al de las inversas locales de las circulares.

Para terminar con las funciones hiperbólicas, le dejamos una pregunta: ¿sabe por qué las del item 6.1 se denominan circulares y las del 6.2 denominan hiperbólicas? Si lo sabe (o no lo sabe y no le interesa en lo más mínimo) puede pasar al parágrafo siguiente. Si no lo sabe y tiene un mínimo de curiosidad, utilizando las identidades (7.18) pruebe que $\cosh(z)^2 - senh(z)^2 = 1$ (para cualquier complejo *z*). Es una cuenta muy sencilla, tan sencilla como la que le permitió probar la identidad $\cos(z)^2 + sen(z)^2 = 1$. Como esto vale para cualquier complejo *z*, en particular son válidas para un parámetro real *t*: $\cos(t)^2 + sen(t)^2 = 1$, $\cosh(t)^2 - senh(t)^2 = 1$. Ahora vuelva a pensar en *circunferencia* e *hipérbola*. Ahora lo dejo seguir solo…

Observaciones y notas finales:

1) Hemos calculado las componentes real e imaginaria de la exponencial, de las circulares y de las hiperbólicas. Para las potencias (y luego para los polinomios), podemos recurrir a la fórmula $(x+iy)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} i^k y^k$ y la periodicidad de las potencias de *i* para separar la parte real y la imaginaria, o bien podemos utilizar la a la expresión exponencial (o polar, como quiera llamarla) $(re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta} = r^n \cos(n\theta) + ir^n sen(n\theta)$. Esta fórmula es válida para complejos no nulos, obviamente, y tiene la ventaja de ser válida para exponentes negativos.

2) Las funciones elementales son holomorfas (en los puntos interiores de sus domnios; de todos modos, aquí las hemos definido en dominios abiertos) y sus derivadas también son funciones elementales. Esto no ocurre con las primitivas de las funciones elementales en general. Un ejemplo famoso es la *función error*, que figura en la lista que sigue.

3) Convendría mencionar, en este capítulo sobre funciones elementales, algunas funciones no elementales. A partir del siglo XVIII y durante todo el XIX, surgieron numerosas funciones no elementales que se hicieron famosas y fueron bautizadas con el apellido de sus descubridores (¿inventores?). Se conocen universalmente como "funciones especiales" y hay manuales enteros sobre las mismas. La mayoría de ellas nacieron del estudio de ecuaciones diferenciales extremadamente importantes en para el análisis matemático y sus aplicaciones. Hay manuales célebres sobre estas funciones, como por ejemplo el "Handbook of Mathematical Functions", de Milton Abramovitz e Irene Stegun. Se trata de una recopilación extensa de todo lo conocido sobre estas funciones, algunas de las cuales son (por ejemplo): la función gamma (es de Euler y la

veremos cuando estudiemos la transformada de Laplace), las funciones de Legendre, las funciones de Bessel, las funciones de onda de Coulomb, las hipergeométricas (que fueron estudiadas por Wallis, Euler, Gauss, Kummer y Riemann, nada menos…), las funciones elípticas de Jacobi, la función elíptica de Weierstrass, las funciones de Hermite, … y la lista sigue. Son funciones analíticas y solamente vamos a mostrar un par de ellas:

Funciones de Besell de orden entero: para cada entero positivo *m*, se define la función de Besell de orden *m* mediante la serie de potencias: $J_m(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n+m}n!(m+n)!}z^{2n+m}$. (la serie converge absolutamente en toda la recta, como puede verse muy fácilmente aplicando el criterio del cociente). Friedrich Wilheim Besell fue un matemático alemán (1784- 1846) y descubrió (¿inventó?) las funciones que hoy llevan su apellido estudiando las ecuaciones de ondas, unas de las ecuaciones más importantes en la historia de la Humanidad. Pero las aplicaciones de la funciones de Besell se han extendido a muchos otros campos teóricos y prácticos, como por ejemplo al de la FM (*frecuencia modulada*), como para dar un ejemplo adicional y prosaico. Aún conservo la esperanza de volver a verlas aparecer en nuestras clases de Análisis III.

La función error: Se trata de otro ejemplo famoso, pero de origen muy distinto. La función error, en variable real, es la función $erf:\Re\longrightarrow\Re$ definida por

$$erf(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt \qquad (7.21)$$

Así definida, es claro que *erf* es la primitiva que se anula en x = 0 de la función $E:\Re\longrightarrow\Re$ dada por $E(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$, para cada $x\in\Re$. Todo esto es muy conocido por los que pasaron por Proba, y se puede dar el desarrollo en serie de la función error de manera muy sencilla: integrando término a término la serie

$$E(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}(1-x^2+\tfrac{1}{2!}x^4-\tfrac{1}{3!}x^6+\tfrac{1}{4!}x^8-...) \qquad (7.22)$$

obtenemos

$$erf(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}(x-\tfrac{1}{3}x^3+\tfrac{1}{5.2!}x^5-\tfrac{1}{7.3!}x^7+\tfrac{1}{9.4!}x^9-...) \qquad (7.23)$$

La serie (7.23) es convergente para todo $x\in\Re$ (criterio del cociente, por ejemplo) y define por lo tanto una función analítica en toda la recta real. Su derivada es, efectivamente la función *E*, como puede comprobarse derivando término a término (si es que todavía necesita convencerse…) y se anula en $x = 0$. Es decir: (7.23) es la definición, mediante series de potencias, de la primitiva de E que se anula en 0. Insisto en esto, pues curiosamente, subsiste una leyenda urbana muy extraña, la que afirma que "la función E no tiene primitiva". Más allá de que se ha demostrado hace un siglo y medio que toda función continua en un intervalo tiene al menos una primitiva en dicho intervalo (recordar el Teorema Fundamental del Cálculo, que por alguna razón se llama Fundamental), sospecho que el origen de la leyenda está en la afirmación: "La función E no tiene primitiva *elemental*". Esta afirmación es correcta, pues la función *erf* no está en la lista de funciones elementales. A esta altura de los acontecimientos, creo que la función error ya acumuló méritos suficientes como para incorporarse al salón de la fama de las funciones elementales. Para nosotros, en Análisis III, nos sirve como un ejemplo más de función analítica, definida para todo complejo z mediante la serie (7.23) es decir:

$$erf(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(z - \tfrac{1}{3}z^3 + \tfrac{1}{5.2!}z^5 - \tfrac{1}{7.3!}z^7 + \tfrac{1}{9.4!}z^9 - ...\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\tfrac{(-1)^n}{(2n+1)n!}z^{2n+1}$$

Queda, por último, el universo desconocido de las funciones analíticas que no son elementales ni famosas (o especiales…). Es un oscuro y vasto universo por explorar, habitado por la inmensa mayoría de las funciones analíticas. Les dejo una, cuyo nombre no conozco y tal vez algún día logre ser bautizada e iluminada por el brillo de la fama:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\tfrac{(-1)^n}{n^n}z^n$$

♫♫♫